

تعبير  $A_1 \times A_2$  عبر  $K$  في  $K$   
 $A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$

انه

البرهان:

و اجمع انه

$$B_1 + B_2 \subseteq A_1 \times A_2$$

$$\forall (a, b) \in A_1 \times A_2$$

$$(a, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, 0) + (0, b) \in B_1 + B_2$$

$$A_1 \times A_2 \subseteq B_1 + B_2$$

$$A_1 \times A_2 = B_1 + B_2$$

$$(a, b) \in B_1 \cap B_2$$

$$(a, b) \in B_1 \quad b = 0$$

$$(a, b) \in B_2 \quad a = 0 \Rightarrow (a, b) = (0, 0) \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \{0\}$$

$$A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$$

وهو المطلوب

المثال الثاني:

تعبير  $A_i$  عن  $A_1$  عبر  $R$   
 $A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1}$  حيث  $f_i$  هي خريطة من  $A_i$  إلى  $A_{i+1}$   
 $i \in I$

$$A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \rightarrow \dots$$

مجال  $A_i$  من  $A_{i-1}$  ونسأ  $f_{i-1}$

ونقول ان المجال  $A_i$  من  $A_{i-1}$  هو  $\text{Im}(f_{i-1})$  و  $\text{Ker}(f_i) = \text{Im}(f_{i-1})$   $\forall i \in I$

$$\text{Ker}(f_i) = \text{Im}(f_{i-1}) \quad \forall i \in I$$

نتيجة:

$$\forall i \in I \quad f_i \circ f_{i-1} = 0$$

من الطرف  $f_i$  ينتج انه



تجهيزات:

ليكن  $f: A \rightarrow B$  شتاتاً هو لن:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$$

المشتاتية

تامة  $\Leftrightarrow f$  شتات

$$2- \text{المشتاتية} \Leftrightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

البرهان:

1- بفرض المشتاتية تامة عند

$$\text{Ker } f = \text{Im}(0) = 0$$

وستكون  $f$  شتات

إذا كان  $f$  شتات فإن  $\text{Ker } f = 0$

$$\text{Im}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(0)$$



## الفئات المتماثل

تعريف: نقول أن  $\mathcal{C}$  توحيد لدينا فئة  $\mathcal{C}$  إذا وجد

1- صف أشياء مميزة  $Ob(\mathcal{C})$   
وتمثلها  $A, B, D, \dots$

2- صف مورفيزمات مميزة  $Mor(\mathcal{C})$   
ويألف من الأسهل  $A \rightarrow B$   $\forall A, B \in Ob(\mathcal{C})$

بحقائق

1- إذا كان  $A, B \in Ob(\mathcal{C})$  فإن  $\mathcal{C}(A, B)$  مجموعة

2- إذا كان  $A, B, D \in Ob(\mathcal{C})$  يوجد تطبيق

$$\mu: \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, D) \rightarrow \mathcal{C}(A, D)$$

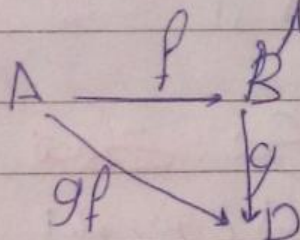
حيث

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, D)$$

فإن

$$\mu(f, g) = g \circ f$$

وسمى تركيب المورفيزمات.

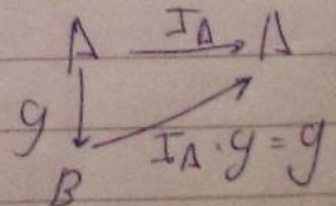
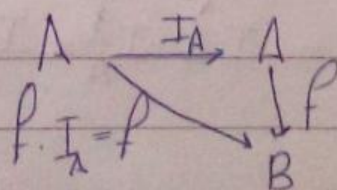


3- إذا كان  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow D$  فإن  $h: D \rightarrow K$  مورفيزمات من  $\mathcal{C}$  فإن

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

4- إذا كان  $A \in Ob(\mathcal{C})$  يوجد

سمي المورفيزم المحايد ولحققت





$$\forall f \in \mathcal{L}(A, B), \quad f|_{I_A} = f$$

$$\forall g \in \mathcal{L}(A, B), \quad I_A \cdot g = g$$

5- إذا كان  $A, A', B, B' \in \text{ob}(\mathcal{L})$  حيث  $(A, A') + (B, B')$

فإن

$$\mathcal{L}(A, A') \cap \mathcal{L}(B, B') = \emptyset$$

**ملاحظة:** لفرض أن  $U$  هي تلك المجموعات التي ليست  
لفرض  $U$  حيث  $U$  هي مجموعة  
تأخذ في  $U$  العنصر  $A$  حيث

$$A = \{ B; B \in U, B \neq B' \}$$

$$A \in A \Rightarrow A \notin A$$

$$A \notin A \Rightarrow A \in A$$

تناقض، إذن

إذا  $U$  ليست مجموعة بل هي

**نتيجة:** لنفرض  $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$  و

المورفزم المطابقة  $I_A$  وحيد

**البرهان:**

لفرض وجود مورفزم مطابق آخر على  $A$

ولكن  $I_A$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I_A} & A \\ & \searrow & \downarrow I'_A \\ & & A \end{array}$$

$$I'_A = I_A \circ I'_A = I_A$$

إذاً:





\* الفئة الثنوية  
الفئة  $L$  من

الفئة الثنوية للفئة  $L$  هي  
الفئة  $L^0$  المخلقة من

$$ob(L^0) = ob(L)$$

1-

2- صف المورفيزمات  $L^0$  من خلال صف  $L$ ، فبذلك  
الفئة  $L$  بعد ذلك هي

$$L^0 = L \Leftarrow$$

نقول: صف  $L$  فئة  $L$  و  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $L$   
 $A, B \in ob(L)$

نقول: صف  $L$  فئة  $L$  و  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $L$   
 $A, B \in ob(L)$ 

1- نقول عن المورفيزم  $u$  أن يكون مورفيزم إذا وافقت:  
 $\forall x \in ob(L)$

$$\alpha: L(x, A) \rightarrow L(x, B)$$

$$\forall f \in L(x, A);$$

$$\alpha \circ f = u \circ f$$

المعرف بالثنائية

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow u \circ f & \downarrow u \\ & & B \end{array}$$

2- نقول عن المورفيزم  $u$  أن يكون مورفيزم إذا وافقت الشرط:

$$B: L(B, x) \rightarrow L(B, x) \quad \forall x \in ob(L)$$

$$g \in L(B, x)$$

المعرف بالثنائية

$$B(g) = g \circ u$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow g \circ u & \downarrow g \\ & & x \end{array}$$



تعريفات:

لبنك  $L$  فئات عتبت

1- تركيب مونويد رينج من هو مونويد رينج

2- ان  $A$  و  $B$  فئات  $Mor(A, B) \neq \emptyset$  و  $A$  و  $B$  فئات

$A$  و  $B$  فئات مونويد رينج فان  $A$  و  $B$  فئات رينج

3- ان  $A$  و  $B$  فئات  $A \in ob(L)$  فان  $I_A$  مونويد رينج

البرهان:

لبنك  $L$  فئات عتبت  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  مونويد رينج للفتات  $L$

عتبت ان  $A$  و  $B$  فئات  $X \in ob(L)$  فان الـ  $L(X, A)$

$$\alpha: L(X, A) \rightarrow L(X, B)$$

المعرف بالستك  $\alpha(\lambda) = f \cdot \lambda$  متباين

وان الـ  $L(X, B) \rightarrow L(X, D)$  و  $L(X, A) \rightarrow L(X, B)$

$$\beta(\mu) = g \cdot \mu$$

لبنك  $L$  فئات عتبت

$$g \cdot f: A \rightarrow D$$

تحت التعريف لـ  $L$  فئات عتبت

$$\gamma: L(X, A) \rightarrow L(X, D)$$

المعرف بالستك  $\gamma(w) = (g \cdot f) \cdot w$  متباين

لبنك  $L$  فئات عتبت  $w_1, w_2 \in L(X, A)$  فان  $\gamma(w_1) = \gamma(w_2)$

$$f \cdot w_1 = f \cdot w_2$$

$$g \cdot (f \cdot w_1) = g \cdot (f \cdot w_2)$$

$$g \cdot f \cdot w_1 = g \cdot f \cdot w_2$$

$$(g \cdot f) \cdot w_1 = (g \cdot f) \cdot w_2$$

$$g(f \cdot w_1) = g(f \cdot w_2)$$

$$x \rightarrow B$$

$$\beta(f \cdot w_1) = \beta(f \cdot w_2)$$

و

$$f w_1 = f w_2$$

وبالتالي

$$\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$$

$$w_1 = w_2$$

لأن  $\alpha$  حقانهنا لا تنطبق فإن  $g.f$  هو هو صريح

انتهت ابداً